

ALGORITMO OSSERVAZIONI INDIRETTE

*I*l presente scritto tratta di un algoritmo applicabile in molti casi attinenti l'ingegneria: il metodo delle "osservazioni indirette" [nota (*)].

PROBLEMA: Determinazione di parametri incogniti costanti (X_1, X_2, \dots, X_m), legati a quantità misurabili (P_1, P_2, \dots, P_n), che variano congruentemente, da una relazione "f" soddisfatta al variare dei gruppi di misure. Impostando correttamente l'ipotesi è possibile stabilire l'esistenza della EQUAZIONE GENERATRICE:

$$f(X_{1,m}; P_{1,n}) = 0$$

ESEMPIO: Avendo disegnato una retta su un piano cartesiano ($x;y$), è possibile scrivere in forma generica la sua equazione: $y = mx + c$, ovvero $y - mx + c = 0$, laddove i valori numerici che determinano la retta sono i parametri incogniti "m" e "c".

Procedendo empiricamente a misure di coppie di coordinate $x;y$ (le quali, in analogia con il problema generale, rappresentano le quantità misurabili che variano congruentemente a una logica che, nell'esempio, è quella dell'equazione della retta) è possibile impostare un sistema di equazioni che consenta di giungere a determinare i valori dei due parametri incogniti.

In questo caso perciò i gruppi di misure strettamente necessari per procedere al calcolo sono due ($x_1;y_1$ e $x_2;y_2$), data la linearità dell'equazione di cui all'esempio – peraltro nota a priori, diversamente dal caso generale trattato – e quindi la determinazione dei due parametri discenderà dalla soluzione del sistema impostato.

IMPOSTAZIONE: Va osservato che il calcolo prende origine appunto da quantità misurate, cioè desunte dalla realtà con l'ausilio di determinati strumenti e comunque affette da un errore connesso all'esecuzione di tale operazione: occorre perciò prendere in considerazione MISURE MULTIPLE, con estrazione a caso su una popolazione di misure possibili. Ciò consente di: ridurre l'influenza degli errori sul

risultato finale; valutare l'accuratezza dell'operazione svolta; individuare gli errori grossolani.

Quindi il generico valore P_i fra le quantità misurabili di cui al problema in esame sarà tale per cui: $i = 1, n$; con $n > m$. Infatti, la precisione del risultato e l'accuratezza della procedura sono strettamente correlate: è fondamentale l'effettiva capacità di tenere sotto controllo il procedimento, in altre parole è indispensabile anzitutto avvalersi di un CRITERIO RIGOROSO.

Bisogna infatti tenere conto globalmente di tutti gli "n" gruppi di misure, il che differisce sostanzialmente dalla soluzione "empirica" data dal ripetere più volte il calcolo avvalendosi di altrettante ripetizioni dei gruppi di misure strettamente necessario: tale soluzione – che è più pratica solo all'apparenza – porta infatti con sé un'aleatorietà del criterio impiegato e perciò una sostanziale imprevedibilità dei risultati ottenuti, perciò da ritenersi non affidabili.

PROCEDIMENTO: Esso comporta di eseguire, in prima approssimazione, la risoluzione del sistema considerando solo il primo gruppo di "m" equazioni, tralasciando le equazioni derivanti dalle misure sovrabbondanti ($n - m$):

$$\begin{aligned} f_1 (...) &= 0 \\ f_2 (...) &= 0 \\ (...) & \\ f_m (...) &= 0 \end{aligned}$$

In tal modo però, le rimanenti equazioni non vengono soddisfatte dai risultati ottenuti, sia perché la relazione è teorica, diversamente dalla "nuvola" di indeterminazione che caratterizza la realtà, sia a causa della presenza di errori; ossia non esiste un m-pla di valori capace di soddisfare simultaneamente tutte le "n" equazioni, mentre esiste una "M-PLA" EMPIRICA in grado di approssimare la relazione teorica lasciando uno scarto, che sarà indicato con "v".

In termini matematici, disponendo di un sistema in cui le equazioni sono in numero superiore alle incognite, il sistema è detto "impossibile" (ogni gruppo di misure P_i con $i = 1, n$ dà luogo a una equazione e, data l'esigenza pratica di eseguire misure sovrabbondanti, saranno sovrabbondanti le equazioni rispetto alle incognite, già consistenti negli X_m parametri ricercati): le equazioni sono in numero sovrabbondante a meno che quelle in soprannumero non siano combinazione delle

altre... Cosa che non può valere nel caso in esame, dato appunto che ogni equazione deriva da un gruppo di misure, le quali, per loro natura, possono solo approssimare la perfezione di una relazione teorica: sorgono così gli scarti appena citati.

$$f(\mathbf{X}_{1,m}; \mathbf{P}_{1,n}) = v$$

A questo punto, ossia prendendo in considerazione gli scarti, il sistema diviene però “indeterminato”, vale a dire che il numero delle incognite supera quello delle equazioni disponibili. La situazione in cui ci si trova ora è infatti la seguente: dato che ogni equazione ha il proprio scarto (v_i , dove $i = 1, n$) il totale delle incognite sarà: $(m + n)$, cioè la m -pla originaria ricercata più tutti gli scarti, mentre le equazioni restano le “ n ” relazioni ottenute a partire dalle misure effettuate.

SOLUZIONE: Affinché il problema sia reso “determinato” e dunque rigorosamente risolvibile, occorre aggiungere una CONDIZIONE: che la soluzione finale sia tale da minimizzare la sommatoria degli scarti al quadrato:

$$\text{Sommatoria } (i = 1, n) v_i \text{ quadrato} = \text{minimo}$$

E’ importante notare che questa è solo una delle condizioni possibili, che ha il pregio di garantire scarti piccoli e omogenei, ossia dello stesso ordine di grandezza: ecco la ragione della potenza quadrata; al contrario la sommatoria dei valori assoluti, per esempio, metterebbe in luce gli eventuali errori grossolani.

DIMOSTRAZIONE: Ovvero come si arriva alla soluzione del problema!!

Dato che per impiegare il principio dei minimi quadrati serve disporre di una equazione lineare, caratteristica che normalmente l’equazione generatrice non ha (contiene infatti funzioni trigonometriche sin e cos), viene utilizzata una procedura di linearizzazione ottenuta applicando lo sviluppo in serie di Taylor; tale sviluppo viene poi troncato a un certo punto, tralasciando i termini successivi.

Occorre perciò partire dalla m -pla approssimata, già calcolata in base a un gruppo “ m ” di equazioni prese fra le “ n ” disponibili, ossia da un numero di equazioni strettamente necessario (sistema determinato): si avrà una m -pla X_{0i} ($i = 1, m$) nota, capace di approssimare la m -pla ricercata X^*m a meno di una correzione da apportare a ciascun termine. Tali correzioni x_m costituiscono le nuove incognite:

$$\mathbf{X}^*i = \mathbf{X}_{0i} + x_i \quad (i = 1, m)$$

E quindi il problema generale potrà essere riscritto in questi termini:

$$f(X^*_{1,m}; P_{1,n}) = v$$

Ricordando però che, a rigore, la P indica non singole misure bensì gruppi di esse:

$$f_i(X^*_{1,m}; P_{[1,s]i}) = v_i$$

Applicando adesso lo sviluppo in serie, ci si trova nella situazione seguente: il primo termine corrisponderà alla m-pla approssimata X_{0m} nota; tutti i termini relativi alla derivata prima – calcolata per tali valori approssimati – corrisponderanno ai coefficienti delle nuove incognite, ossia le x_m correzioni ricercate; i restanti termini dalla derivata seconda in poi verranno conglobati in un resto:

$$f_i(X_{0[1,m]}; P_i) + [(d'f_i/d'X_{01}) x_1 + (...) + (d'f_i/d'X_{0m}) x_m] + R = v_i$$

Ciò vale a dire che, supposta una funzione qualsiasi, incognita, di cui sia noto il valore in un determinato punto, il suo valore a distanza di un dato intervallo può essere ottenuto – passando dalla funzione al polinomio ovvero sviluppando in serie – come somma dei seguenti termini: il valore di partenza; più il valore della derivata prima della funzione in quel punto, ossia la tangente dell'angolo che ne dà l'inclinazione moltiplicata per l'intervallo considerato; più un ulteriore termine (resto), che nel nostro caso viene supposto trascurabile, avvalendosi in via provvisoria dell'ipotesi arbitraria che il suo ordine di grandezza sia inferiore a quello degli errori. Il valore di “f” dopo un intervallo “a” sarà:

$$X \text{ inc.} = X_0 + a (d'f = \text{tg.alfa}) + (\text{resto} = \text{termini d}''...)$$

In tal modo si giunge a “linearizzare” l'equazione generatrice, ottenendo la EQUAZIONE GENERATA. La sua espressione, per la i-esima funzione considerata ($i = 1,n$) e supponendo trascurabile il resto, è la seguente:

$$l_i(T.N.) + [a_i x_1 + b_i x_2 + (...) + m_i x_m] = v_i \pm R$$

Il termine “ l_i ” è un termine noto, essendo la soluzione corrispondente alla m-pla approssimata calcolata in partenza, mentre tutti i coefficienti [a_i , b_i , (...), m_i] della m-pla x_m ($j = 1,m$) sono noti in quanto a loro volta calcolati in base alla funzione approssimata: come incognite rimangono le “x” e lo scarto “ v_i ”.

A partire da questa relazione sarà infine possibile risolvere il sistema: una volta ricavate le “x” esse verranno sommate alle “ X_0 ” note per ottenere le “ X^* ” finali.

Separatamente, tornando a sostituire le “x” nel sistema, sarà possibile anche giungere a determinare anche gli scarti “ v_i ” ($i = 1,n$).

APPLICAZIONE: Prescindendo dalla dimostrazione, disponendo di una equazione lineare, la generata, è applicabile la predetta condizione per rendere determinato il sistema, il quale non lo era a causa della presenza degli scarti (dovuti al nostro intento di avvalerci di misure sovrabbondanti durante il processo di determinazione dei parametri incogniti caratterizzanti la relazione ricercata...).

La condizione prescelta vuole che la soluzione sia quella tale da minimizzare la sommatoria degli scarti al quadrato. Per inciso è utile ricordare che una funzione è minima quando il suo differenziale (incremento infinitesimo) è nullo, dunque:

$$d'f(x) \, dx = 0$$

Essendo dx arbitrario però comunque diverso da zero, ne consegue che affinché sia nullo il prodotto deve essere nulla la derivata; tornando alla condizione imposta, essa può essere scritta come somma di tutti i “ v_i ” ($i = 1, n$), ciascuno elevato al quadrato:

$$v_1 \text{ quadrato} + v_2 \text{ quadrato} + (...) + v_n \text{ quadrato} = \text{minimo}$$

Da cui, derivando, cioè imponendo differenziale totale nullo:

$$2 v_1 \, dv_1 + (...) + 2 v_n \, dv_n = 0$$

Eliminando in tutta l’espressione la costante 2 e tenendo conto che v_i sono a questo punto più variabili (?), il nuovo problema conseguente la condizione diviene:

$$\text{Sommatoria } (i = 1, n) \, v_i \, d v_i = 0$$

Tuttavia si osserva che lo scarto “ v_i ” è combinazione lineare (funzione) di tutte le variabili fra loro indipendenti scritte nell’equazione generata, ovvero dei coefficienti [a_i , b_i , (...), m_i] corrispondenti alle derivate – rispetto a ciascuna incognita – della funzione originaria, calcolate per i valori approssimati (m -pla X_0m).

Inoltre, calcolando l’espressione del differenziale “ $d v_i$ ” e osservando che il termine noto nella derivazione naturalmente scompare, si ha che:

$$d v_i = a_i \, dx_1 + b_i \, dx_2 + (...) + m_i \, dx_m$$

Questa espressione del “ $d v_i$ ” viene sostituita nella scrittura aggiornata della condizione di nullità di cui sopra che, pur presentando l’operatore sommatoria ($i = 1, n$), è un’unica equazione (cioè non è riferita al solo scarto i -esimo, bensì a tutti gli scarti indicati col generico termine “ v_i ” della successione).

Infatti, sviluppando i prodotti della $S.v_i$ per ogni termine costituente il “ $d v_i$ ” si ha:

$$\mathbf{S.vi ai dx1 + S.vi bi dx2 (...) + S.vi mi dxm = 0}$$

In questa espressione si osserva però che i termini “dx” corrispondenti agli incrementi infinitesimi delle variabili sono diversi da zero per definizione: ne consegue che, condizione per soddisfare la nullità dell’intera relazione è imporre la nullità dei coefficienti [S.vi ai, S.vi bi, (...), S.vi mi]. Si potrà finalmente scrivere per ciascuno di essi la condizioni di nullità:

$$\mathbf{Sommatoria (i = 1,n) vi ai = 0}$$

$$\mathbf{Sommatoria (i = 1,n) vi bi = 0}$$

(.....)

$$\mathbf{Sommatoria (i = 1,n) vi mi = 0}$$

Procedendo infine alla sostituzione, in ciascuna relazione, dell’espressione di “vi” così come era stata scritta nell’equazione generata, notando che questa volta il termine noto va mantenuto, la condizione diventa:

$$\mathbf{Sommatoria [ai x1 + bi x2 + (...) + mi xm + li] ai = 0}$$

$$\mathbf{Sommatoria [ai x1 + bi x2 + (...) + mi xm + li] bi = 0}$$

(.....)

$$\mathbf{Sommatoria [ai x1 + bi x2 + (...) + mi xm + li] mi = 0}$$

Va ricordato che la lettere rimanda all’incognita rispetto alla quale viene effettuata la derivazione (a rispetto a x1, b rispetto a x2, (...), m a rispetto a xm) mentre la i richiama il gruppo di misure coinvolto.

Sviluppando i prodotti scriveremo il seguente sistema, detto sistema normale, formato – come originariamente desiderato – da m equazioni in m incognite, quindi determinato, però contenente in modo rigoroso l’effetto di tutti gli n gruppi di misure effettuati, vale a dire coinvolgendo contemporaneamente quel numero sovrabbondante di misure eseguito a garanzia di precisione dell’intera operazione: infatti l’operatore sommatoria rimane per ricordare, come già in precedenza rimarcato, che le “i” della notazione non rimandano al singolo termine i-esimo (altrimenti quelle del sistema normale non sarebbero singole equazioni) bensì a tutti gli i termini, indicati appunto in modo generico.

Il SISTEMA NORMALE presenterà la forma seguente:

$$\mathbf{S. ai ai x1 + S. ai bi x2 + S. ai ci x3 + (...) + S. ai mi xm + S. ai li = 0}$$

$$\mathbf{S. bi ai x1 + S. bi bi x2 + S. bi ci x3 + (...) + S. bi mi xm + S. bi li = 0}$$

(.....)

$$S. \text{ mi ai } x_1 + S. \text{ mi bi } x_2 + S. \text{ mi ci } x_3 + (...) + S. \text{ mi mi } x_m + S. \text{ ci li } = 0$$

Nell'uso pratico, una volta impostato il problema, scritta l'equazione generatrice e realizzata la prima soluzione approssimata di avvio del procedimento, si passa subito alla scrittura del sistema normale e alla sua soluzione, con calcolo delle incognite e successiva sostituzione dei loro valori nell'equazione generata per la determinazione degli scarti a meno dei quali il procedimento è stato condotto.

RIEPILOGO: Siamo passati da un sistema impossibile – quello originariamente impostato e comprendente i gruppi di misure sovrabbondanti – a un sistema indeterminato – perché comprendente gli scarti che si sono originati a seguito del calcolo di una prima m-pla approssimata di valori per i parametri ricercati.

L'applicazione del principio dei minimi quadrati è la condizione che ci consente di rendere determinato il sistema: a questo punto viene scritto il “sistema normale” la cui soluzione conduce al calcolo di una m-pla correttiva da sommare a quella approssimata per ottenere la m-pla di valori ricercata. Tali valori dei parametri incogniti saranno quelli caratterizzanti la funzione che ricerchiamo.

Tuttavia si osserverà che i valori degli scarti “vi” risulteranno grandi, in quanto l'aver trascurato la “R” in sede di linearizzazione era stato arbitrario.

Infatti, la scrittura del sistema normale era stata fondata sulla linearizzazione dell'equazione generatrice trasformata in equazione generata: i suoi coefficienti [ai, bi, (...), mi] corrispondevano però solo al primo termine di uno sviluppo in serie, mentre i termini successivi, ritenuti conglobati in un resto, erano stati assunti come trascurabili perché ipotizzati di ordine di grandezza inferiore a quello degli errori.

Era noto che tale ipotesi fosse arbitraria: la si era accettata in via provvisoria solo perché strumentalmente indispensabile per procedere con le operazioni.

ITERAZIONE: Per depurare la soluzione così ottenuta da questo vizio in essa insito, occorre ripetere – iterare – l'intero calcolo.

La m-pla X^* ($X^*_i = X_{0i} + x_i$) appena calcolata, prende il posto – nell'iterazione – di nuova m-pla approssimata X_0 . Dunque si passa subito a formulata l'equazione

generata operando le derivate rispetto alle incognite e a riscrivere il sistema normale: dalla sua soluzione nascerà una nuova m-pla correttiva x...

Questa iterazione verrà ripetuta altre volte: l'ipotesi di trascurabilità del resto R rimane infatti insista in ogni applicazione del procedimento utilizzato per scrivere il sistema normale, dato che i suoi coefficienti sono ottenuti tramite derivazione della funzione rispetto alle incognite – calcolata per i valori approssimati assunti – svolta limitatamente alla derivata prima. Per inciso, va ricordato che ogni coefficiente [ai, bi, (...), mi] corrisponde alla derivata della funzione rispetto a una variabile e che la "i" associata sta a indicare che ogni derivata cambia in funzione del gruppo di misure che contiene (il gruppo i-esimo, appunto).

In altre parole, le iterazioni servono perché l'equazione trascendente è stata linearizzata trascurando il resto: se essa fosse stata già lineare le iterazioni non sarebbero servite!!

Le iterazioni verranno arrestate soltanto quando si osserverà che la sommatoria vi quadrato non diminuisce più, vale a dire quando sarà stata realizzata la condizione di minimo: l'andamento di tale valore (sommatoria vi quadrato) rispetto al numero di iterazioni ha infatti comportamento asintotico.

Da un punto di vista operativo il controllo del numero di iterazioni da svolgere viene assicurato automaticamente programmando una funzione "test" al calcolatore del tipo: "Stop alle iterazioni quando la diminuzione del valore calcolato risulta minore del 5% oppure quando si è raggiunto un dato numero massimo di iterazioni".

Peraltro, il problema potrebbe anche divergere... Inoltre la ricerca della condizione di minimo potrebbe anche portare, matematicamente, a individuare un massimo: è quindi fondamentale l'applicazione di un controllo consapevole rispetto allo svolgimento della procedura di calcolo informatizzato. E anzitutto occorrerà porre particolare attenzione alla scelta dei valori approssimati.

COMMENTO: Il criterio presentato risulta affidabile dal punto di vista ingegneristico in quanto è rigoroso e consente il controllo della precisione dei risultati. La misura di ciò potrebbe essere affidata a un parametro:

$$m0 = \text{Rad.q (sommatoria vi quadrato)} / (n-m)$$

In esso il numeratore dà conto della precisione con cui sono state eseguite le misure, mentre il denominatore dà conto del numero di equazioni esuberanti; un valore più piccolo di m_0 rimanderà quindi sia a valori minori ottenuti per gli scarti vi sia a un maggior numero di equazioni esuberanti, utili a contenere l'effetto dell'errore insito nelle quantità misurabili empiricamente rilevate.

Per inquadrare quanto esposto, è utile porsi il seguente quesito: qualora la misura fosse diretta, quanti sarebbero i parametri da determinare? Uno!! La misura stessa...!

La misura vera in questo caso sarà un valore centrale, teorico, fra quelli possibili: infatti, detto M il valore vero incognito e supponendo di essere in condizione di assenza di errori, avremmo che:

$$M - Q_i = 0$$

Nella pratica invece ognuna di queste relazioni eguaglierà a uno scarto... usando il metodo delle osservazioni indirette – e considerando che le misure rilevate non saranno gruppi bensì singoli valori – potremo scrivere l'equazione generatrice.

$$f(M; Q_{1,n}) = 0$$

A questo punto occorre applicare il principio dei minimi quadrati... osservando peraltro che l'equazione è già lineare, il sistema normale sarà solo:

$$S. a_i x_1 + S. a_i b_i x_2 + S. a_i c_i x_3 + (...) + S. a_i m_i x_m + S. a_i l_i = 0$$

Cioè, data l'unicità dell'incognita (che è M) e dato che la derivata rispetto a essa è uguale a uno, ripetendo n volte il prodotto $a_i * a_i$ si giungerà al risultato seguente:

$$(n * M) - \text{sommatoria } Q_i = 0$$

Bisogna osservare quindi che il principio dei minimi quadrati è globale: le osservazioni indirette così impostate e applicate al caso di misure dirette, danno luogo alla media aritmetica. Ciò che importa è che viene seguito un criterio!!

SINTESI: I passi logici del procedimento operativo sono i seguenti:

1. Impostazione del problema, consistente nella ricerca di una funzione caratterizzata da una serie di m parametri incogniti: per la loro determinazione sarà possibile disporre solo di gruppi di misure rilevate e a ogni gruppo corrisponderà la scrittura di una equazione.
2. Scrittura dell'equazione generatrice, contenente gruppi di misure sovrabbondanti (sistema impossibile) per tutelare i risultati dall'incidenza dell'errore insito nel procedimento empirico di rilevazione delle misure.
3. Calcolo di una prima m -pla approssimata di valori per i parametri ricercati, condotto sulla base di un numero di gruppi di misure strettamente necessario: le equazioni del sistema, non soddisfatte in modo esatto, producono altrettanti scarti incogniti (sistema indeterminato).
4. Sviluppo in serie – volto a rendere lineari le funzioni qualora già non lo siano – e ottenimento dell'equazione generata, in cui le nuove incognite sono le correzioni da apportare alla m -pla approssimata e i relativi coefficienti sono le derivate prime di ogni funzione, calcolate per i valori approssimati, rispetto a ciascuna variabile: i termini ulteriori dello sviluppo sono ritenuti conglobati in un resto provvisoriamente assunto come trascurabile... così, ogni i -esima funzione eguaglia solo al proprio scarto, senza resto.
5. Applicazione del principio dei minimi quadrati quale condizione per ridurre il numero di incognite: minimizzare, o massimizzare... una sommatoria di quadrati corrisponde infatti ad annullare la sommatoria dei relativi differenziali: siamo in grado di avere funzioni che eguagliano a zero.
6. Scrittura del sistema normale (sistema determinato) e sua soluzione, cioè calcolo della m -pla correttiva; successiva somma di ciascun valore a quelli della m -pla approssimata e quindi ottenimento della m -pla incognita.
7. Determinazione, noti i valori della m -pla correttiva costituenti le incognite della funzione linearizzata, degli n scarti, che saranno appunto in numero pari alle equazioni, cioè pari al numero dei gruppi di misure effettuati.
8. Scrittura di un nuovo sistema normale i cui coefficienti saranno calcolati – ancora tramite derivazione di ogni funzione rispetto a ciascuna variabile – utilizzando come nuova m -pla approssimata la m -pla appena ottenuta: soluzione del sistema e ottenimento della nuova m -pla correttiva nonché ricalcolo degli scarti.
9. Ulteriore iterazione del procedimento e così via... spingendosi fino a che si realizza la sostanziale costanza del valore di sommatoria degli scarti al quadrato: la corrispondente m -pla di valori per i parametri ricercati sarà quella confermata.

NOTA (*)

L'algoritmo in questione viene utilizzato, per esempio, per georeferenziare i modelli stereoscopici dati dalla ripresa fotogrammetrica.

Un rilievo realizzato col metodo fotogrammetrico richiede infatti che venga effettuata una ripresa fotografica in modo tale da disporre dell'intera copertura della superficie reale tramite coppie di fotogrammi. La realtà in esame sarà poi restituita per punti, secondo procedure codificate.

Tutti i punti desunti da uno stesso modello sono però caratterizzati solo da una coerenza interna, che diventerà valida rispetto a un sistema di riferimento generale quando avrà subito l'opportuna rototraslazione, ossia un'operazione di "messa in scala" rispetto al sistema medesimo.

Tale risultato viene conseguito facendo sì che ogni modello restituito contenga alcuni punti la cui posizione reale sia certa, punti cioè che siano anche rilevati separatamente, con procedimento topografico o, per esempio, tramite GPS.

Disponendo di questi punti rilevati e data la loro contemporanea presenza nel modello, da tale corrispondenza si può ricavare una "legge" valida per essere estesa a tutti i punti del modello.

La legge in questione è il risultato dell'applicazione dell'algoritmo descritto: è dunque evidente l'importanza di perseguire la massima precisione (ogni piccolo errore ha potenzialmente vaste ripercussioni) e anche, soprattutto, di effettuare l'intera procedura seguendo un criterio certo, la cui applicazione possa essere tenuta costantemente sotto controllo.

ALGORITMO OSSERVAZIONI INDIRETTE: COMMENTI

Obiettivo: è individuare dei parametri incogniti X legati a quantità misurabili – che possiamo rilevare dalla realtà fisica – tramite una relazione f anch'essa incognita: i parametri X sono costanti, le quantità P variano congruentemente alla logica della relazione ricercata, ossia la soddisfano.

Nell'esempio della retta i parametri incogniti sono pendenza e ordinata all'origine, le quantità misurabili sono le coordinate di punti appartenenti alla retta stessa: servono quindi due gruppi di misure, cioè due coppie di coordinate.

Con ogni gruppo di misure eseguito si può impostare un'equazione, eseguendo quindi un numero di gruppi di misure pari a quello dei parametri e mettendo le equazioni a sistema i parametri sarebbero immediatamente determinabili.

Bisogna però osservare che quanto detto varrebbe intendendo i “punti” come qualcosa di esatto (punto euclideo) mentre la rilevazione dalla realtà comporta un errore, una indeterminazione, che si ripercuote sull'intero calcolo: occorre perciò eseguire un numero sovrabbondante di gruppi di misure per mediare l'influenza dell'errore e per tenerlo sotto controllo durante il processo di calcolo.

Ne deriva un numero di equazioni sovrabbondante rispetto alle incognite: sistema impossibile. Il sistema però diviene indeterminato allorché si osserva che, a causa della medesima indeterminazione, ogni equazione non eguaglia più a zero bensì a uno scarto incognito (v_i) che si suppone di ordine di grandezza pari agli errori di misura.

Per rendere determinato il sistema occorrerà applicare una condizione: allo scopo verrà adottato il principio dei minimi quadrati, che conduce ad ottenere scarti piccoli e omogenei fra loro.

Per applicare questa condizione occorre però disporre di equazioni lineari, caratteristica che generalmente le equazioni generatrici (quelle scritte a partire dai gruppi di misure rilevati) non hanno, contengono infatti funzioni trigonometriche...

Esse vanno quindi linearizzate applicando lo sviluppo in serie di Taylor: si ottengono così le equazioni generate. Taylor ci dice che, a partire da un valore noto di una funzione in un determinato punto, il suo valore dopo un intervallo dx è dato da: il valore noto iniziale + il valore della derivata prima calcolata per quel punto per dx + altri termini contenenti le derivate ulteriori moltiplicate per le potenze di dx ... Così, supponendo di ricercare il valore dell'intervallo fra un valore noto e il punto dove la funzione si annulla (ovvero nel

nostro caso dove assume il valore dello scarto v_i), l'incognita diventa dx .

Poiché a questo punto ci occorrono dei valori noti, approssimati, delle incognite, li otteniamo risolvendo un numero strettamente necessario di equazioni scelte a caso fra quelle disponibili. Procediamo perciò a una ridefinizione delle incognite: le nuove incognite saranno le correzioni (x) – equivalenti al suddetto intervallo – da apportare ai valori approssimati (X^0) per ottenere i valori finali (X^*) ricercati.

Va osservato che in tale ridefinizione delle incognite lo sviluppo in serie verrà limitato al termine corrispondente alla derivata prima, conglobando in un resto R – che viene provvisoriamente trascurato – tutti i termini rimanenti. Per tale motivo occorrerà iterare il procedimento, mentre invece, in caso di equazioni già lineari in partenza, la m -pla correttiva calcolata sarà già una soluzione rigorosamente esatta.

Definiamo ora le nuove quantità comunque occorrenti. Per ogni funzione i -esima, occorrerà calcolare il coefficiente di ciascun parametro incognito che sarà: la derivata della funzione – calcolata per i valori approssimati già determinati – rispetto all'incognita corrispondente. Esempio: $a_i = \partial f_i(X^0) / \partial X^0$. Le funzioni originarie compaiono ora soltanto sotto forma di coefficienti numerici. Avremo poi un termine noto (l_i) pari al valore della funzione calcolata per i valori approssimati.

Tornando al principio dei minimi quadrati, la nostra condizione imposta sarà: $\sum(v_i^2) = \min$. Ricordiamo che una funzione ha un punto di minimo – o di massimo – quando il suo differenziale totale è nullo. Esempio: $f(z) = \min \rightarrow f'(z) \cdot dz = 0$. Nel nostro caso quindi si avrà $\sum(v_i \cdot dv_i) = 0$.

A questo punto la condizione è effettivamente applicabile – come segue – e darà luogo a un sistema determinato poiché lo scarto v_i può essere visto a sua volta come una funzione di tutte le incognite: $v_i = (a_i \cdot x_1 + b_i \cdot x_2 + \dots + m_i \cdot x_m + l_i)$ e quindi un suo incremento infinitesimo sarà: $dv_i = (a_i \cdot dx_1 + b_i \cdot dx_2 + \dots + m_i \cdot dx_m)$.

$$\sum(v_i \cdot dv_i) = 0 \quad \rightarrow \quad \sum[v_i \cdot (a_i \cdot dx_1 + b_i \cdot dx_2 + \dots + m_i \cdot dx_m)] = 0 \quad \rightarrow \quad \sum v_i \cdot a_i \cdot dx_1 + \sum v_i \cdot b_i \cdot dx_2 + \dots + \sum v_i \cdot m_i \cdot dx_m$$

Questa è un'unica equazione dove per ciascun termine si ha $i = (1, n)$, da cui il significato della ripetizione dell'operatore sommatoria. Inoltre, affinché differenziale totale sia nullo, occorre che siano nulli tutti i termini sommati e siccome nell'ambito di ogni termine l'incremento infinitesimo (dx) è NON nullo per definizione, dovranno essere nulli tutti i coefficienti: nasce così un sistema di m equazioni in m incognite.

In tale sistema ciascuna equazione contiene, attraverso l'operatore \sum applicato a ogni termine, tutte le quantità frutto degli n gruppi di misure effettuate (con $n > m$), richiamati

nella scrittura attraverso il generico termine i-esimo.

$$\begin{aligned} \sum v_i \cdot a_i &= 0 & \sum (a_i \cdot x_1 + b_i \cdot x_2 + \dots + m_i \cdot x_m + l_i) \cdot a_i &= 0 & \rightarrow \sum a_i \cdot a_i \cdot x_1 + \sum a_i \cdot b_i \cdot x_2 + \dots + \sum a_i \cdot m_i \cdot x_m &= 0 \\ \sum v_i \cdot b_i &= 0 & \rightarrow \sum (a_i \cdot x_1 + b_i \cdot x_2 + \dots + m_i \cdot x_m + l_i) \cdot b_i &= 0 & \rightarrow \sum b_i \cdot a_i \cdot x_1 + \sum b_i \cdot b_i \cdot x_2 + \dots + \sum b_i \cdot m_i \cdot x_m &= 0 \\ \dots\dots\dots & & & & & \\ \sum v_i \cdot m_i &= 0 & \rightarrow \sum (a_i \cdot x_1 + b_i \cdot x_2 + \dots + m_i \cdot x_m + l_i) \cdot m_i &= 0 & \rightarrow \sum m_i \cdot a_i \cdot x_1 + \sum m_i \cdot b_i \cdot x_2 + \dots + \sum m_i \cdot m_i \cdot x_m &= 0 \end{aligned}$$

La soluzione di questo sistema, detto sistema normale, consente il calcolo della m-pla di incognite \mathbf{x} corrispondenti alle correzioni che, sommate ai valori approssimati \mathbf{X}^o precedentemente calcolati danno i valori \mathbf{X}' , ancora distanti dagli \mathbf{X}^* ricercati.

A questo punto infatti occorre procedere a una iterazione dei calcoli, dato che in sede di linearizzazione delle equazioni generatrici avevamo trascurato il resto sulla base di un'ipotesi che risulta non verificata: le correzioni appena determinate non risulteranno dello stesso ordine di grandezza degli errori di misura...! I risultati ottenuti quindi non sono ancora accettabili.

Con i valori dei parametri a questo punto disponibili, cioè la m-pla \mathbf{X}' , si calcolano i valori degli scarti v_i dall'espressione delle equazioni generatrici originarie: noti tali scarti si calcola il valore della sommatoria dei loro quadrati.

Poi si riutilizzano gli stessi valori \mathbf{X}' dei parametri ottenuti come nuova m-pla approssimata, ricalcolando con essi i coefficienti del sistema normale e ridefinendo una nuova m-pla correttiva \mathbf{x}'' : la soluzione di questa seconda versione del sistema normale porterà quindi a una nuova m-pla di valori finali \mathbf{X}'' dei parametri incogniti ricercati.

Come prima si calcolano i valori degli scarti e quello della sommatoria dei loro quadrati: si confronta la sommatoria con il valore precedente e si quantifica il calo avvenuto. Altresì, si reitera l'operazione utilizzando l'ultima m-pla disponibile come m-pla approssimata... e così via, sino a che si manifesta una sostanziale costanza.

Come anticipato all'inizio, è possibile anche quantificare l'errore quadratico medio (*e.q.m.*) connesso alla m-pla di valori dei parametri finalmente ritenuta accettabile: esso sarà pari al valore finale della sommatoria degli scarti al quadrato diviso il numero di gruppi di misure sovrabbondanti. Da cui l'interesse a minimizzare l'entità degli scarti e a massimizzare, nei limiti della fattibilità, il numero di gruppi di misure rilevati.

Analogamente si può calcolare il valore dell'errore quadratico medio connesso alla determinazione di ogni singolo parametro incognito: ciò avviene attraverso la scrittura della matrice inversa dei coefficienti del sistema normale.